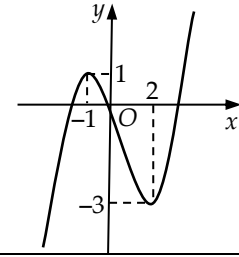


**Câu 1.** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên.

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình  $\sqrt{f'(x)}[f(x)+2] = 0$  là

- A. 6.                      B. 3.  
C. 5.                      D. 4.



**Bài giải**

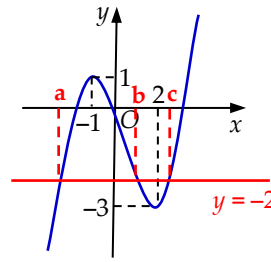
• Điều kiện:  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 2$

•  $\sqrt{f'(x)}[f(x)+2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = -2 \end{cases}$

•  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 & (n) \\ x = 2 & (n) \end{cases} \quad (1)$

•  $f(x) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a < -1 & (n) \\ x = b \in (0; 2) & (l) \\ x = c > 2 & (n) \end{cases} \quad (2)$

• (1) và (2) suy ra phương trình  $\sqrt{f'(x)}[f(x)+2] = 0$  có 4 nghiệm thực phân biệt



**Câu 2.** Có bao nhiêu số nguyên  $x$  thỏa mãn  $(9^x - 10 \cdot 3^{x+2} + 729)\sqrt{3 - \log_2 x} \geq 0$ ?

- A. 5.                      B. 8.                      C. 6.                      D. 7.

**Bài giải**

• Điều kiện:  $\begin{cases} x > 0 \\ 3 - \log_2 x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 8$

•  $9^x - 10 \cdot 3^{x+2} + 729 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 90 \cdot 3^x + 729 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 81 \\ 3^x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}$

•  $3 - \log_2 x = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 8$

• Bảng xét dấu

| $x$ | 0 | 2           | 4 | 8 |
|-----|---|-------------|---|---|
| VT  |   | + 0 - 0 + 0 |   |   |

• Dựa vào bảng xét dấu ta có:  $(9^x - 10 \cdot 3^{x+2} + 729)\sqrt{3 - \log_2 x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$

• Vậy có 7 số nguyên  $x$  thỏa mãn  $(9^x - 10 \cdot 3^{x+2} + 729)\sqrt{3 - \log_2 x} \geq 0$ .

**Câu 3.** Trên tập hợp các số phức, xét phương trình  $z^2 - z + m = 0$  ( $m$  là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của  $m$  để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1| = |z_2| = 1$ ?

- A. 0.                      B. 3.                      C. 2.                      D. 1.

### Bài giải

- $|z_1| = |z_2|$  chỉ xảy ra khi phương trình  $z^2 - z + m = 0$  không có nghiệm thực

Nghĩa là  $\Delta = 1 - 4m < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$  (1)

- $\begin{cases} |z_1| = 1 \\ |z_2| = 1 \end{cases} \Rightarrow |z_1| \cdot |z_2| = 1 \Rightarrow |z_1 z_2| = 1 \Rightarrow |m| = 1 \Rightarrow m = \pm 1$  (2)

- (1) và (2) ta có một giá trị  $m$  đó là  $m = -1$  thỏa YCBT

**Câu 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Biết  $f'(x) = \frac{1}{x^2}, \forall x \in (0; +\infty)$  và  $f(1) = 3$ , khi đó  $\int_1^e f(x) dx$  bằng

- A.  $4e - 3$ .                      B.  $4e - 5$ .                      C.  $2e - 1$ .                      D.  $2e - 3$ .

### Bài giải

- $f'(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x} + C$  (\*)

- Với  $x = 1$  thì (\*)  $\Rightarrow f(1) = -\frac{1}{1} + C \Rightarrow 3 = -1 + C \Rightarrow C = 4$

- Vậy  $f(x) = -\frac{1}{x} + 4 \Rightarrow \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left(-\frac{1}{x} + 4\right) dx = \left(-\ln|x| + 4x\right)\Big|_1^e = 4e - 5$ .

**Câu 5.** Cho khối chóp đều  $S.ABCD$  có  $SA = \sqrt{15}a$  và góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$  bằng  $60^\circ$ . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- A.  $\sqrt{3}a^3$ .                      B.  $12a^3$ .                      C.  $2\sqrt{3}a^3$ .                      D.  $18a^3$ .

### Bài giải

- $(SAB) \cap (SCD) = St$  với  $St$  song song với  $AB$
- Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$

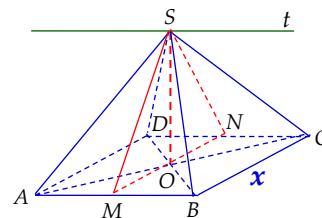
$$\text{Suy ra } \begin{cases} SM \perp AB \\ SN \perp CD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SM \perp St \\ SN \perp St \end{cases} \Rightarrow MSN = ((SAB), (SCD)) = 60^\circ$$

Suy ra  $\triangle SMN$  đều

- Gọi  $x$  là độ dài cạnh hình vuông  $ABCD$
- Ta có  $MN = BC \Rightarrow MN = x \Rightarrow \triangle SMN$  đều cạnh  $x$

- $\triangle SMA$  vuông tại  $M$  nên  $SA^2 = SM^2 + AM^2 \Rightarrow 15a^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{5x^2}{4} \Rightarrow x^2 = 12a^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}a$

- $S_{ABCD} = x^2 = 12a^2$



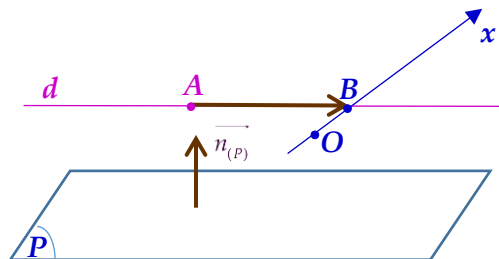
- $SO = \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{(2\sqrt{3}a)\sqrt{3}}{2} = 3a$
- $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}12a^2.3a = 12a^3.$

**Câu 6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(3;-2;-1)$  và mặt phẳng  $(P): 2x - y - z + 4 = 0$ . Gọi  $d$  là đường thẳng đi qua  $A$ , cắt trục  $Ox$  và song song với  $(P)$ . Điểm nào dưới đây nằm trên  $d$ ?

- A.  $P(2;-2;-3)$ .      B.  $N(4;-1;0)$ .      C.  $M(3;-1;2)$ .      D.  $Q(6;2;1)$ .

### Bài giải

- Gọi  $B = d \cap Ox \Rightarrow B \in Ox \Rightarrow B(a;0;0)$
- $\overrightarrow{AB} = (a-3; 2; 1)$  và  $\overrightarrow{n_{(P)}} = (2;-1;-1)$
- $d // (P) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{n_{(P)}} \Rightarrow 2(a-3) - 2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{9}{2}$   
 $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\frac{9}{2} - 3; 2; 1\right) = \left(\frac{3}{2}; 2; 1\right) = \frac{1}{2}(3; 4; 2)$
- $d$  đi qua  $A(3;-2;-1)$  và có VTCP  $\vec{a} = (3; 4; 2)$  nên có phương trình  $\frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{2}$
- Thế tọa độ  $Q(6;2;1)$  vào phương trình  $d$  ta được  $\frac{6-3}{3} = \frac{2+2}{4} = \frac{1+1}{2}$  đúng
- Vậy  $d$  đi qua điểm  $Q$ .

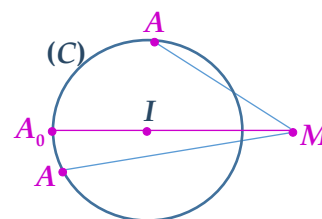


**Câu 7.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 1 + 2i| = 4$ . Giá trị lớn nhất của  $|\bar{z} + 2 + i|$  bằng

- A.  $3\sqrt{2} + 4$ .      B.  $3\sqrt{2} + 2$ .      C.  $\sqrt{2} + 2$ .      D.  $\sqrt{2} + 4$ .

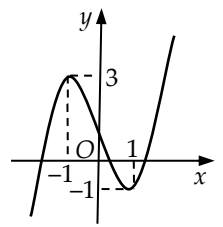
### Bài giải

- Gọi  $A$  là điểm biểu diễn số phức  $z = x + yi$  thì  $A(x; y)$
- Ta có:  $|z - 1 + 2i| = 4 \Leftrightarrow |x + yi - 1 + 2i| = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$   
 Suy ra  $A$  nằm trên đường tròn  $(C)$  tâm  $I(1; -2)$ , bán kính  $R = 4$
- Ta có:  $|\bar{z} + 2 + i| = |x - yi + 2 + i| = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = MA$  với  $M(-2; 1)$   
 Vậy  $|\bar{z} + 2 + i|$  lớn nhất khi và chỉ khi  $MA$  có độ dài lớn nhất



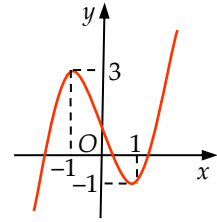
- Vì  $MI = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} > 4 = R$  nên  $M$  ở ngoài  $(C)$   
 Do đó  $MA$  có độ dài lớn nhất khi  $A$  di chuyển trên đường tròn  $(C)$  đến vị trí  $A_0$  như trong hình vẽ
- Ta có  $MA_0 = MI + IA_0 = MI + R = 3\sqrt{2} + 4$  là giá trị lớn nhất của  $|\bar{z} + 2 + i|$ .

**Câu 8.** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [-5; 5]$  để hàm số  $y = f(f(x) - m)$  có đúng 4 điểm cực trị?



- A. 11.                      B. 10.  
C. 6.                        D. 4.

### Bài giải



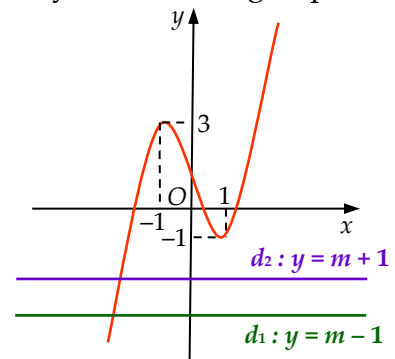
- $y = f(f(x) - m) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot f'(f(x) - m)$
- $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot f'(f(x) - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f'(f(x) - m) = 0 & (2) \end{cases}$
- Dựa vào đồ thị hàm số  $y = f(x)$  thì hàm số  $y = f(x)$  có hai điểm cực trị  $x = -1$  và  $x = 1$ , do vậy:
- Xét phương trình (1) ta có  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$
- Xét phương trình (2) ta có  $f'(f(x) - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - m = -1 \\ f(x) - m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = m - 1 \\ f(x) = m + 1 \end{cases} (*)$
- Hàm số  $y = f(f(x) - m)$  có đúng 4 điểm cực trị  $\Leftrightarrow (*)$  có đúng 2 nghiệm đơn khác 1 và -1.
- Vì  $m - 1 < m + 1$  nên  $(*)$  có đúng 2 nghiệm đơn khác 1 và -1 chỉ xảy ra hai trường hợp sau:

#### Trường hợp 1.

Đường thẳng  $d_2: y = m + 1$  nằm phía dưới hoặc trùng với đường thẳng  $\Delta_1: y = -1$

Nghĩa là:  $m + 1 \leq -1 \Leftrightarrow m \leq -2$

Vì  $m \in [-5; 5]$  nên có 4 giá trị  $m$  nguyên thỏa mãn bài toán



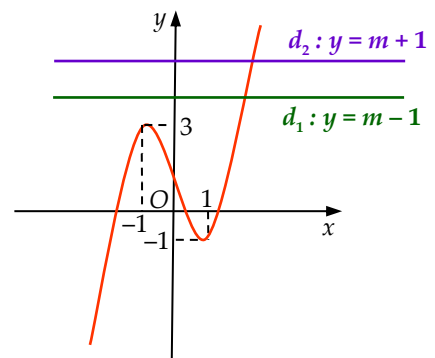
#### Trường hợp 2.

Đường thẳng  $d_1: y = m - 1$  nằm phía trên hoặc trùng với đường thẳng  $\Delta_2: y = 3$

Nghĩa là:  $m - 1 \geq 3 \Leftrightarrow m \geq 4$

Vì  $m \in [-5; 5]$  nên có 2 giá trị  $m$  nguyên thỏa mãn bài toán

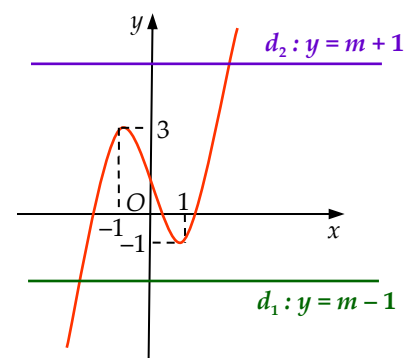
Hai trường hợp cho ta 6 giá trị  $m$  nguyên thỏa mãn bài toán



#### Ghi chú

Nhận thấy khoảng cách giữa hai đường thẳng  $d_1: y = m - 1$  và  $d_2: y = m + 1$  bằng 2 và khoảng cách giữa hai đường thẳng  $\Delta_1: y = -1$  và  $\Delta_2: y = 3$  bằng 4 do vậy không thể xảy ra trường hợp  $d_1$  nằm dưới hoặc trùng  $\Delta_1$  đồng thời  $d_2$  nằm trên hoặc trùng  $\Delta_2$ . Thậy vậy nếu điều đó xảy ra thì ta có

$$\begin{cases} m - 1 \leq -1 \\ m + 1 \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 2 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$



**Câu 9.** Cho phương trình  $(\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2)\sqrt{3^x - m} = 0$ . Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thực phân biệt?

A. 72.

B. 2.

C. 71.

D. 73.

### Bài giải

• Điều kiện:  $\begin{cases} x > 0 \\ 3^x - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq \log_3 m \end{cases} \quad (*)$

•  $(\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2)\sqrt{3^x - m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0 \\ \sqrt{3^x - m} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = 2 \\ 3^x = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \\ x = \log_3 m \end{cases}$

• Kết hợp với điều kiện (\*), để phương trình đã cho có hai nghiệm, ta xét các trường hợp sau:

**Trường hợp 1.**  $\log_3 m \leq 0 \Leftrightarrow 0 < m \leq 1$

Khi đó phương trình đã cho có hai nghiệm  $x = 2 \vee x = 4$

Vậy nhận  $0 < m \leq 1$  (1)

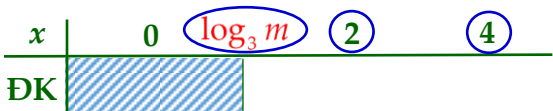


**Trường hợp 2.**  $0 < \log_3 m < 2 \Leftrightarrow 1 < m < 9$

Khi đó phương trình đã cho có ba nghiệm

$x = \log_3 m \vee x = 2 \vee x = 4$

Vậy không nhận  $1 < m < 9$



**Trường hợp 3.**  $2 \leq \log_3 m < 4 \Leftrightarrow 9 \leq m < 81$

Khi đó phương trình đã cho có hai nghiệm

$x = \log_3 m \vee x = 4$

Vậy nhận  $9 \leq m < 81$  (2)



**Trường hợp 4.**  $\log_3 m \geq 4 \Leftrightarrow m \geq 81$

Khi đó phương trình đã cho có một nghiệm  $x = \log_3 m$

Vậy không nhận  $m \geq 81$



Tóm lại: (1) và (2) có 73 giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

**Câu 10.** Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  có ba điểm cực trị là 0; 1 và 2. Gọi  $(C)$  là đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$ . Biết  $(C)$  đi qua điểm  $M(3;12)$ , diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị  $(C)$  và trục hoành bằng

A. 4.

B.  $\frac{1}{4}$ .

C.  $\frac{1}{2}$ .

D. 1.

### Bài giải

• Vì hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  có ba điểm cực trị là 0; 1 và 2 nên phương trình  $f'(x) = 0$  có 3 nghiệm  $x = 0, x = 1$  và  $x = 2$

Suy ra  $f'(x) = ax(x-1)(x-2)$

- (C) đi qua điểm  $M(3;12)$  nên  $a.3(3-1)(3-2) = 12 \Leftrightarrow a = 2$
- Vậy  $f'(x) = 2x(x-1)(x-2)$
- Ta có:  $S = \int_0^2 |2x(x-1)(x-2)| dx = 1.$

**Câu 11.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai mặt cầu  $(S_1): (x-4)^2 + (y+5)^2 + (z-1)^2 = 64$  và  $(S_2): (x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 4$ . Gọi  $(S)$  là mặt cầu có bán kính bằng 1 và tiếp xúc ngoài với cả hai mặt cầu  $(S_1)$  và  $(S_2)$ , khi đó tâm của  $(S)$  thuộc mặt phẳng nào sau đây?

- A.**  $3x - 4y - 8 = 0$ .      **B.**  $3x - 4y - 6 = 0$ .      **C.**  $3x - 4y + 9 = 0$ .      **D.**  $3x - 4y + 11 = 0$ .

### Bài giải

- Gọi  $I$  và  $R$  lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu  $(S)$
- $(S_1)$  có tâm  $I_1(4; -5; 1)$  và bán kính  $R_1 = 8$
- $(S_2)$  có tâm  $I_2(-2; 3; 1)$  và bán kính  $R_2 = 2$
- $(S)$  tiếp xúc ngoài với  $(S_1)$  nên  $II_1 = R_1 + R = 8 + 1 = 9$

Suy ra  $I$  nằm trên mặt cầu  $(S')$  có tâm  $I_1$  và bán kính  $R' = 9$

Ta có phương trình  $(S'): (x-4)^2 + (y+5)^2 + (z-1)^2 = 81 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y - 2z - 39 = 0$  (1)

- $(S)$  tiếp xúc ngoài với  $(S_2)$  nên  $II_2 = R_2 + R = 2 + 1 = 3$

Suy ra  $I$  nằm trên mặt cầu  $(S'')$  có tâm  $I_2$  và bán kính  $R'' = 3$

Ta có phương trình  $(S''): (x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 2z + 5 = 0$  (2)

- Tọa độ  $I(x; y; z)$  thỏa hai phương trình (1) và (2)

Lấy (1) trừ (2) ta được  $-12x + 16y - 44 = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 11 = 0$

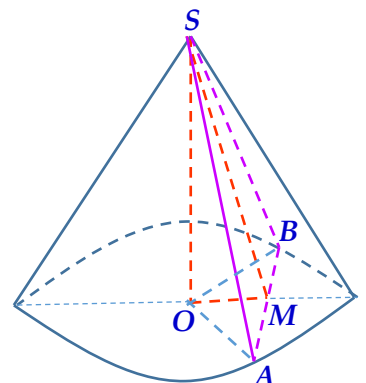
- Vậy  $I \in (P): 3x - 4y + 11 = 0$ .

**Câu 12.** Cho khối nón đỉnh  $S$  có bán kính đáy bằng  $\sqrt{15}a$  và  $O$  là tâm của đáy. Gọi  $A$  và  $B$  là hai điểm thuộc đường tròn đáy và  $M$  là trung điểm của  $AB$  sao cho  $SM = 2SO$  và diện tích tam giác  $SAB$  bằng 2 lần diện tích tam giác  $SOM$ . Thể tích của khối nón đã cho bằng

- A.**  $10\pi a^3$ .      **B.**  $30\pi a^3$ .      **C.**  $5\pi a^3$ .      **D.**  $15\pi a^3$ .

### Bài giải

- Đặt  $SO = h \Rightarrow SM = 2h$  và theo giả thiết ta có  $OA = \sqrt{15}a$
- Trong  $\Delta SOM$  ta có  $OM^2 = SM^2 - SO^2 = 4h^2 - h^2 = 3h^2 \Rightarrow OM = h\sqrt{3}$
- $S_{\Delta SOM} = \frac{1}{2}SO \cdot OM = \frac{1}{2}h \cdot h\sqrt{3} = \frac{h^2\sqrt{3}}{2}$
- Trong  $\Delta OMA$  ta có  $AM^2 = OA^2 - OM^2 = 15a^2 - 3h^2$   
 $\Rightarrow AM = \sqrt{15a^2 - 3h^2} \Rightarrow AB = 2AM = 2\sqrt{15a^2 - 3h^2}$



- $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} SM.AB = \frac{1}{2} 2h.2\sqrt{15a^2 - 3h^2} = 2h\sqrt{15a^2 - 3h^2}$
- Ta có:  $S_{\Delta SAB} = 2S_{\Delta SOM} \Leftrightarrow 2h\sqrt{15a^2 - 3h^2} = 2.\frac{h^2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{15a^2 - 3h^2} = h\sqrt{3}$   
 $\Leftrightarrow 4(15a^2 - 3h^2) = 3h^2 \Leftrightarrow 60a^2 - 12h^2 = 3h^2 \Leftrightarrow 15h^2 = 60a^2 \Leftrightarrow h^2 = 4a^2 \Leftrightarrow h = 2a$
- Vậy  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi.15a^2.2a = 10\pi a^3$ .

----- HẾT -----